第21講　体積は切る！

21

［A］ xyz 空間内に2つの立体 K，L がある．どのような a に対しても，平面 $z=a$ による立体 K の切り口は3点 $(0,\ 0,\ a)$，$(1,\ 0,\ a)$，$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ a\right)$ を頂点とする正三角形である．また，どのような a に対しても，平面 $y=a$ による立体 L の切り口は3点 $(0,\ a,\ 0)$，$\left(0,\ a,\ \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$，$\left(1,\ a,\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ を頂点とする正三角形である．このとき，立体 K と L の共通部分の体積を求めよ．

［B］ 立体 K：$x^2+y^2+z^2\leqq 4$ と立体 L：$(x-1)^2+y^2\leqq 1$ の共通部分の立体の体積 V を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 21 講　体積は切る！

21　xyz 空間に 5 点 A(1，1，0)，B(−1，1，0)，C(−1，−1，0)，D(1，−1，0)，P(0，0，3) をとる．四角錐 PABCD の

$$x^2+y^2 \geqq 1$$

を満たす部分の体積を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第21講　体積は切る！

21

［A］ xyz 空間内に2つの立体 K，L がある．どのような a に対しても，平面 $z=a$ による立体 K の切り口は3点 $(0,\ 0,\ a)$，$(1,\ 0,\ a)$，$\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ a\right)$ を頂点とする正三角形である．また，どのような a に対しても，平面 $y=a$ による立体 L の切り口は3点 $(0,\ a,\ 0)$，$\left(0,\ a,\ \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$，$\left(1,\ a,\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ を頂点とする正三角形である．このとき，立体 K と L の共通部分の体積を求めよ．

［B］ 立体 K：$x^2+y^2+z^2\leqq 4$ と立体 L：$(x-1)^2+y^2\leqq 1$ の共通部分の立体の体積 V を求めよ．

【答】 ［A］ $\frac{1}{4}$

［B］ $\frac{16(3\pi-4)}{9}$

【解説】

［A］ 2つの立体 K，L はそれぞれ

$$K:\begin{cases} 0\leqq y\leqq \sqrt{3}\,x & \left(0\leqq x\leqq \frac{1}{2}\right) \\ 0\leqq y\leqq \sqrt{3}\,(1-x) & \left(\frac{1}{2}<x\leqq 1\right) \end{cases}$$

$$L:\frac{1}{\sqrt{3}}x\leqq z\leqq \frac{1}{\sqrt{3}}(2-x)\quad (0\leqq x\leqq 1)$$

と表せる．立体 K と L の共通部分を平面 $x=t$ で切った切り口は

(I) $0\leqq t\leqq \frac{1}{2}$ のとき

$$0\leqq y\leqq \sqrt{3}\,t \text{ かつ } \frac{1}{\sqrt{3}}t\leqq z\leqq \frac{1}{\sqrt{3}}(2-t)$$

(II) $\frac{1}{2}<t\leqq 1$ のとき

$$0\leqq y\leqq \sqrt{3}\,(1-t) \text{ かつ } \frac{1}{\sqrt{3}}t\leqq z\leqq \frac{1}{\sqrt{3}}(2-t)$$

といずれの場合も長方形となるので求める体積は

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{3}\,t\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}(1-t)dt+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{3}\,(1-t)\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}(1-t)dt$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}2t(1-t)dt+\int_{\frac{1}{2}}^{1}2(1-t)^2dt$$

$$=\left[t^2-\frac{2}{3}t^3\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[-\frac{2}{3}(1-t)^3\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

［B］ 題意の共通部分の立体を平面 $x=t$ で切ると

$$t^2+y^2+z^2\leqq 4 \text{ かつ } (t-1)^2+y^2\leqq 1 \iff y^2+z^2\leqq 4-t^2 \text{ かつ } y^2\leqq 2t-t^2$$

となるが，これは $4-t^2\geqq 0$ かつ $2t-t^2\geqq 0$，つまり $0\leqq t\leqq 2$ という条件のもとで

$$y^2+z^2\leqq 4-t^2 \text{ かつ } -\sqrt{2t-t^2}\leqq y\leqq\sqrt{2t-t^2}$$

と変形でき，これらを満たす領域の面積 S を考える．

このとき，P$(t,\ 0,\ 0)$，Q$(t,\ \sqrt{2t-t^2},\ \sqrt{4-2t})$，R$(t,\ 0,\ \sqrt{4-t^2})$，H$(t,\ \sqrt{2t-t^2},\ 0)$ として，$\angle$QPR$=\theta$ とおき，対称性を利用すると面積 S は，扇形 PQR の面積と三角形 PQH の面積の和を 4 倍したものであるので

$$S=4\left\{\frac{1}{2}(\sqrt{4-t^2})^2\theta+\frac{1}{2}\sqrt{2t-t^2}\sqrt{4-2t}\right\}$$

となる．よって求める体積 V は

$$V=\int_0^2 4\left\{\frac{1}{2}(\sqrt{4-t^2})^2\theta+\frac{1}{2}\sqrt{2t-t^2}\sqrt{4-2t}\right\}dt$$

$$=\int_0^2 2(4-t^2)\theta\,dt+\int_0^2 2\sqrt{2}\sqrt{t}\,(2-t)dt$$

となるが，

$$\int_0^2 2\sqrt{2}\sqrt{t}\,(2-t)dt=2\sqrt{2}\int_0^2\left(2t^{\frac{1}{2}}-t^{\frac{3}{2}}\right)dt$$

$$=2\sqrt{2}\left[\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\right]_0^2=\frac{64}{15}$$

であり，$\tan\theta=\sqrt{\dfrac{t}{2}}$ つまり $t=2\tan^2\theta$ より $dt=4\tan\theta\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$ であることと，t が 0 から 2 まで変化するとき θ は 0 から $\dfrac{\pi}{4}$ まで変化することなどより

$$\int_0^2 2(4-t^2)\theta\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}2(4-4\tan^4\theta)\theta\cdot 4\tan\theta\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}32(\tan\theta-\tan^5\theta)\frac{1}{\cos^2\theta}\theta\,d\theta$$

$$=32\left\{\left[\left(\frac{1}{2}\tan^2\theta-\frac{1}{6}\tan^6\theta\right)\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{2}\tan^2\theta-\frac{1}{6}\tan^6\theta\right)d\theta\right\}$$

$$=32\left\{\frac{\pi}{12}-\frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(3\tan^2\theta-\tan^6\theta)d\theta\right\}$$

となる．

ここで，0 以上の整数 n に対して $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n\theta\,d\theta$ とおくと

$$I_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n\theta\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right)d\theta=\left[\frac{1}{n+1}\tan^{n+1}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n\theta\,d\theta=\frac{1}{n+1}-I_n$$

が成り立つので

$$3I_2-I_6=3I_2-\left(\frac{1}{5}-I_4\right)=3I_2-\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}+I_2\right)=2I_2+\frac{2}{15}=2(1-I_0)+\frac{2}{15}=\frac{32}{15}-2I_0$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

となり，$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{4}}1d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$ となるので $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(3\tan^2\theta-\tan^6\theta)d\theta=\frac{32}{15}-\frac{\pi}{2}$

よって

$$V=32\left\{\frac{\pi}{12}-\frac{1}{6}\left(\frac{32}{15}-\frac{\pi}{2}\right)\right\}+\frac{64}{15}=\boldsymbol{\frac{16(3\pi-4)}{9}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第21講　体積は切る！

> **21**　xyz 空間に5点 A(1, 1, 0), B(−1, 1, 0), C(−1, −1, 0), D(1, −1, 0), P(0, 0, 3) をとる．四角錐 PABCD の
> $$x^2+y^2\geqq 1$$
> を満たす部分の体積を求めよ．

【答】　$4+4\sqrt{2}-3\pi$

【解説】

AP を $\dfrac{t}{3}:\left(1-\dfrac{t}{3}\right)$ に分ける点は

$$\left(1-\frac{t}{3}\right)(1,\ 1,\ 0)+\frac{t}{3}(0,\ 0,\ 3)$$
$$=\left(1-\frac{t}{3},\ 1-\frac{t}{3},\ t\right)$$

であるので，求める部分を $z=t$ で切った切り口の $0\leqq y\leqq x$ の範囲にあるものは

$$x\leqq 1-\frac{t}{3} \text{ かつ } 0\leqq y\leqq x \text{ かつ } x^2+y^2\geqq 1$$

を満たしていて，

$$\sqrt{2}\left(1-\frac{t}{3}\right)\geqq 1 \iff t\leqq 3\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

という条件のもとで，この領域の面積は $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1-\frac{1}{3}t}(x-\sqrt{1-x^2})\,dx$ で求められる．

　このとき，対称性に注目すると求める体積 V は

$$\frac{1}{8}V=\int_0^{3\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\left\{\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1-\frac{1}{3}t}(x-\sqrt{1-x^2})\,dx\right\}dt$$

$x=\cos\theta$ と置換すると，$\cos\alpha=1-\dfrac{1}{3}t$，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ なる α を用いて

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1-\frac{1}{3}t}(x-\sqrt{1-x^2})\,dx$$
$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\alpha}(\cos\theta-\sin\theta)\cdot(-\sin\theta)\,d\theta$$
$$=\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta-\frac{1}{2}\right)d\theta$$
$$=\left[-\frac{1}{4}\cos 2\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta-\frac{1}{2}\theta\right]_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\pi\right)-\left(-\frac{1}{4}\cos 2\alpha+\frac{1}{4}\sin 2\alpha-\frac{1}{2}\alpha\right)$$
$$=\frac{1}{8}(-2\sin 2\alpha+2\cos 2\alpha+4\alpha-\pi+2)$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

更に $\cos\alpha=1-\dfrac{1}{3}t$ より $dt=3\sin\alpha\, d\alpha$ であるので

$$\frac{1}{8}V=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{8}(-2\sin 2\alpha+2\cos 2\alpha+4\alpha-\pi+2)\cdot 3\sin\alpha\, d\alpha$$

$$\therefore\quad V=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\{-12\sin^2\alpha\cos\alpha+6(2\cos^2\alpha-1)\sin\alpha+12\alpha\sin\alpha-3(\pi-2)\sin\alpha\}d\alpha$$

$$=\Big[-4\sin^3\alpha+2(3\cos\alpha-2\cos^3\alpha)+12(-\alpha\cos\alpha+\sin\alpha)+3(\pi-2)\cos\alpha\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\mathbf{4+4\sqrt{2}-3\pi}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。